Mathematik

im

mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil der Sekundarstufe II

Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen

Andreas-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Herder-Gymnasium
Immanuel-Kant-Gymnasium

Humboldt-Universität zu Berlin

Stand: Juli 2009

Vorbemerkung

Der vorliegende Rahmenplan gilt ab dem Schuljahr 2010/2011 für die vier Kurssemester im Leistungsfach Mathematik MA+. Der Leistungskurs wird im zweiten und dritten Semester durch zwei zusätzliche Grundkurse ma-Z ergänzt.

Der Rahmenplan gibt die zu unterrichtenden Lerninhalte an; durch spezifische Anmerkungen methodisch-didaktischer Art werden das intendierte Vorgehen und die beabsichtigte Tiefe ergänzend beschrieben.

Zielgruppe des Unterrichts auf der Basis dieses Planes sind Schülerinnen und Schüler mit besonderem mathematischen Interesse oder Begabung, die sich in den entsprechenden Klassen der oben genannten Schulen mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt befunden haben.

Der Rahmenplan wurde in enger Kooperation mit dem Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin entwickelt und orientiert sich an den inhaltlichen Erfordernissen der Vorlesungen des Grundstudiums Mathematik *Analysis I* und *Lineare Algebra / Analytische Geometrie I*.
Selbstverständlich kann der Schulunterricht weder in der Breite noch in der Tiefe diese Vorlesungen und Übungen vorwegnehmen oder ersetzen. Jedoch ist es erklärtes Ziel und Absicht der Planungsgruppe, dass Schulabgängerinnen und -abgänger mit diesem unterrichtlichen Hintergrund einen deutlich leichteren Zugang zum Mathematikstudium finden sollen.

Globale Übersicht über die Unterrichtseinheiten

Kurs	Thema	Std.	Unterrichtseinheiten	Std.
MA-1+	**Analysis I**	75	Reelle Zahlenfolgen, Grenzwerte	20
			Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit	20
			Differenzierbarkeit, Ableitung	15
			Funktionsuntersuchungen	20
MA-2+	**Analysis II**	60	Integralrechnung I	10
			Integralrechnung II	15
			Anwendungen	10
			Exponential- und Logarithmusfunktion	15
			Anwendungen und Vertiefungen	10
	Stochastik I	15	Grundbegriffe der Stochastik	15
ma-Z.2	**Analysis**	45	Sätze und Ergänzungen zur Differentialrechnung	30
			Vertiefungen und Anwendungen der Integralrechnung	12
			Ergänzungen	3
MA-3+	**Lineare Algebra und Analytische Geometrie**	75	Vektorraum	25
			Analytische Geometrie: affine Geometrie	10
			Analytische Geometrie: metrische Geometrie	10
			geometrische Grundaufgaben	20
			Schwerpunkt nach Wahl (z. B. Determinanten)	10
ma-Z.3	**Lineare Algebra**	45	Lineare Gleichungssysteme (LGS) und Matrizen	20
			Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen I	15
			Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen II	10
MA-4+	**Stochastik II**	55	Zufallsgrößen	10
			spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	30
			Beurteilende Statistik	15
		Rest	komplexe Übungen (Prüfungsvorbereitung)	Rest

MA-1+: Analysis I (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
20	**Reelle Zahlenfolgen, Grenzwerte** Reelle Zahlenfolgen als Funktionen von den natürlichen in die reellen Zahlen Veranschaulichung von Folgen auf der Zahlengeraden Beschränktheit und Monotonie von Folgen Grenzwerte, Konvergenz einer Folge, Häufungswerte, konvergente Teilfolgen, Beschränktheit einer konvergenten Folge Nachweise dafür, dass eine Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge ist mittels der Grenzwertdefinition Konvergenzkriterium von Cauchy Grenzwertsätze für konvergente Folgen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient) Konvergenzkriterium für monotone Folgen $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	Hier ist ggf. an den Abschnitt *Folgen und Grenzwerte in elementarer Form* der Klasse 10 anzuknüpfen. Es bietet sich an, exemplarisch rekursive und explizite Darstellungen von Folgen gegenüber zu stellen (u.a. für geometrische Folgen und Reihen) und so eine Verbindung zum Thema V*ollständige Induktion* zu knüpfen. Es sollten logische Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert diskutiert und ein Ausblick auf bestimmt und unbestimmt divergente Folgen gegeben werden. Aus Zeitgründen sollte man sich auf instruktive Beispiele beschränken. Der Beweis ist eine lehrreiche Anwendung der Definition von Konvergenz. Der Beweis eines Grenzwertsatzes genügt. Anwenden der Sätze für den Konvergenznachweis bzw. die Ermittlung von Grenzwerten für Folgen. Als Beispiele für konvergente bzw. divergente Folgen sollten auch Partialsummenfolgen herangezogen werden. empfohlene Ergänzung
20	**Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit** Grenzwertuntersuchungen (insbesondere an Definitionslücken und im Unendlichen) Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen auf solche für Funktionen Stetigkeit von Funktionen (Folgendefinition) an einer Stelle und auf ihrem Definitionsbereich stetige Fortsetzbarkeit Verknüpfung stetiger Funktionen einschließlich Verkettung reelle Nullstellen ganzrationaler Funktionen, Faktorisierung und Polynomdivision, Nullstellensatz Betrachtung gebrochenrationaler Funktionen unter obigen Aspekten (Definitionslücken, Asymptotenfunktionen)	Funktionsterme wie $\frac{x^2-1}{x+1}$, $\frac{\lvert x\rvert}{x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\cos(x)-1}{x}$, $x^n\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ z. B. trigonometrische Funktionen. Es sind auch Beispiele für nicht-stetige oder nicht stetig fortsetzbare Funktionen zu behandeln. Begründung, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. (also ohne Ableitungen!)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Differenzierbarkeit, Ableitung** Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzenquotientenfolgen Zusammenhang Stetigkeit -- Differenzierbarkeit Begriff der Ableitungsfunktion Ableitungsregeln: $(c)'=0; (x)'=1;$ $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}, n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ Ableitung trigonometrischer Funktionen Produkt-, Quotienten- und Kettenregel Ableitung der Umkehrfunktion Ableitung von x^r, $r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	Aus Zeitgründen soll nicht neu gestartet werden, die Kenntnisse aus Klasse 10 sind zu vertiefen. Die drei Aspekte der 1. Ableitung sollten anschaulich herausgearbeitet werden: 1. Tangentensteigung an der entsprechenden Stelle 2. lokale Änderungsrate (z. B. Momentangeschwindigkeit) 3. lineare Approximierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle An einer Stelle stetige, jedoch nicht differenzierbare Funktionen sollten angesprochen werden. Zu vorgegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion ermitteln und graphisch darstellen. Vergleich der Graphen von f, f', f'' Die Regeln sollten aus Klasse 10 bekannt sein. Die Ableitung von Kosinus, Tangens und Kotangens kann auf die Ableitung des Sinus gestützt werden. Wiederholung zu Umkehrfunktionen aus Klasse 10, graphische Darstellung von f und f^{-1}
20	**Funktionsuntersuchungen** Relative Extrema einer Funktion, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen mit entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien (auch Vorzeichenwechselkriterium) bei differenzierbaren Funktionen Funktionsuntersuchungen mit den bisher behandelten Funktionsklassen, auch Scharen absolute Extrema einer Funktion auf einer Menge Extremwert- und Anwendungsaufgaben zu den bisher behandelten Funktionsklassen Newton-Verfahren	Auch hier ist an Inhalte aus Klasse 10 anzuknüpfen. Es sollte verdeutlicht werden, dass diese Begriffsbildungen nicht an die Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktionen gebunden sind. Die Kriterien sind anschaulich plausibel zu machen; deren Beweis erfolgt im ma-Z. Beweise im ma-Z nur als Werkzeug, ohne Konvergenzuntersuchungen

MA-2+: Analysis II und Stochastik I (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Integralrechnung I** Inhalte von Flächen unter Graphen als Grenzwerte eine Definition des bestimmten Integrals (Riemann-Integrals) für auf [a;b] definierte und beschränkte Funktionen mittels ausgezeichneter Zerlegungsfolgen Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall monotone bzw. stetige Funktionen Eigenschaften des bestimmten Integrals: Intervalladditivität, Linearität	 Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- und Untersummen berechnen Definition z. B. mittels Ober- und Untersummen oder mittels Riemannscher Zwischensummen Für den Nachweis der Integrierbarkeit einer über [a;b] stetigen Funktion ist die Aussage des Satzes über die gleichmäßige Stetigkeit erforderlich; dies wird im ma-Z behandelt.
15	**Integralrechnung II** Mittelwertsatz der Integralrechnung Integralfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Stammfunktion, unbestimmtes Integral Satz über die Differenz zweier Stammfunktionen zu derselben Funktion Berechnen einfacher bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen Methode der partiellen Integration Integration durch Substitution	 geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes mögliche Ergänzung: Differentiale
10	inner- und außermathematische **Anwendungen**: Flächeninhalte, Volumen von Rotationskörpern (Kugel, Paraboloid, Ellipsoid), physikalische Arbeit	
15	**Exponential- und Logarithmusfunktion** Einführung der ln-Funktion über das Integral $L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,,\ \ x > 0$	 Äquivalente Zugänge sind hier natürlich möglich.

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	Folgerungen aus der Integraldefinition: einzige Nullstelle 1, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie Funktionalgleichung der Funktion *L*, Ermittlung der Wertemenge $W(\ln)=\mathbb{R}$: „Enttarnung“ als Logarithmusfunktion Ermittlung der Basis z. B. mit Hilfe der Zwischenwerteigenschaft des bestimmten Integrals Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich $\int \frac{dx}{x}=\ln(\lvert x\rvert)+C\,,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Einführung der e-Funktion als Umkehrfunktion der ln-Funktion, Eigenschaften der e-Funktion Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln(\lvert f(x)\rvert)+C$	Dieser Weg bietet sich wegen seiner Effektivität an: Es werden alle zentralen Begriffe aus der Analysis benutzt. Die Eigenschaften der e-Funktion ergeben sich als Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften der ln-Funktion (der Funktion *L*).
10	**Anwendungen und Vertiefungen** Funktionsuntersuchungen (auch Scharen) und Anwendungsaufgaben zu exp und ln. uneigentliche Integrale Integration mittels einfacher Partialbruchzerlegung Arcus-Funktionen	Ortskurven ... ist eine mögliche Ergänzung. Hier ist nur an wenige, einfache Beispiele gedacht. ... sind eine mögliche Ergänzung: Ableitung mittels Umkehrfunktion, Vervollständigung der zur Verfügung stehenden Grundintegrale.
15	**Stochastik** Systematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei endlicher Ergebnismenge (Ergebnisse, Ereignisse, Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes) Modelle (Urnenmodelle, Baumdiagramm, Glücksrad, Galton-Brett, ...), Paradoxa Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes-Formel	Aus der Mittelstufe sollten bekannt sein: (Laplace-) Wahrscheinlichkeit, kombinatorische Zählprinzipien; mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramm, Pfadregeln, Vierfeldertafel. Daran ist anzuknüpfen; eine gemeinsame Basis sollte geschaffen werden.

ma-Z.2: Analysis (45 Stunden im 2. Semester)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	Sätze und Ergänzungen zur Differentialrechnung	
9	*Stetigkeit:*	
	ε-δ-Definition der Stetigkeit	... an einfachen, exemplarischen Beispielen, dann auch Abgrenzung zur gleichmäßigen Stetigkeit
	gleichmäßige Stetigkeit	Die zentrale Bedeutung dieser Sätze (z. B. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, Hilfsmittel bei Beweisen) ist hervorzuheben.
	Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum	
12	*Sätze über differenzierbare Funktionen:*	
	Satz von Rolle	Die Sätze eignen sich zur Vergabe von Referaten.
	1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	
	Monotonie und Ableitung	Beweis des Monotoniekriteriums mittels Mittelwertsatz $f = const \Leftrightarrow f' = 0$
	Regeln von de l' Hospital	Der Beweis einer Regel reicht aus.
	stetige Differenzierbarkeit	
9	*Satz von Taylor* mit Restglied, Darstellung von Funktionen durch Taylorreihen	Mittels Restgliedabschätzung sollten einige Funktionen in Taylorreihen entwickelt werden.
12	**Vertiefungen und Anwendungen der Integralrechnung**	
	Integration stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen	
	numerische Integrationsmethoden	
	Bogenlänge	Als Anwendung der Bogenlänge bietet es sich an, die Krümmung eines Funktionsgraphen in einem Kurvenpunkt zu ermitteln.
3	**mögliche Ergänzungen:**	
	einfache, gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen	Über die Modellierung realer Prozesse (Wachstum, Zerfall) gelangt man zu entsprechenden DGL, die durch elementare Verfahren gelöst werden sollen.
	kontrahierende Abbildungen, Fixpunktsätze	
	Integration durch Partialbruchzerlegung	

MA-3+: Lineare Algebra und Analytische Geometrie (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
25	**Vektorraum** Erarbeitung des Begriffes Vektorraum anhand geeigneter Modelle Linearkombination, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis, Basisaustauschsatz, Dimension, Eindeutigkeit der Darstellung bez. einer Basis Unterraum, Unterraumkriterium Ergänzung: Körper $\mathbb{C}$ als weiteres Beispiel einer algebraischen Struktur	 Der Lösungsraum einer homogenen linearen Gleichung sollte nicht als Beispiel gewählt werden: → ma-Z. Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle bewusst verzichtet werden, um den Begriff des Vektors allgemeiner zu verankern. Auf Kenntnisse aus Klasse 10 (Additum) ist aufzubauen.
10	**Analytische Geometrie: affine Geometrie** der affine (Punkt-) Raum A^3 (Geometrie) mit dem zugehörigen Vektorraum V^3 der Verschiebungen, Axiome des Zusammenhangs, affines Koordinatensystem und zugehörige (kanonische) Basis des Vektorraums geometrische Probleme: Punkte, Geraden und Ebenen im A^3 (in Parameter- und Koordinatenform) Untersuchung von Lagebeziehungen	 An geeigneten Stellen können die Kenntnisse und Voraussetzungen aus der ebenen euklidischen Geometrie aufgegriffen werden.
10	**Analytische Geometrie: metrische Geometrie** Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt: Definitionen, Rechenregeln, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	 Beim Skalarprodukt ist der zentrale Aspekt der geometrische Gedanke der Projektion auf eine vorgegebene Richtung.
20	**geometrische Grundaufgaben:** Abstände, Längen und Winkel; Flächeninhalt eines Dreiecks Normalenform der Ebenengleichung, Hessesche Normalenform; Kugeln Inzidenzuntersuchungen komplexerer Art mit Geraden, Ebenen und Kugeln, Abstände und Winkel; Tangentialebenen Volumen eines Spats, einer dreiseitigen Pyramide	 Hier ist auch an die variable Herleitung von Ebenengleichungen aus unterschiedlichen bestimmenden Objekten gedacht.
10	**Schwerpunkt nach Wahl**	Die genannten Gebiete sollen nach Bedarf und Wunsch vertieft werden. Auch Erweiterungen Empfehlung: *Determinanten* -- sind möglich.

ma-Z.3: Lineare Algebra (45 Stunden im 3. Semester)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
20	**Lineare Gleichungssysteme (LGS) und Matrizen** Begriff des LGS, Lösungsmengenbestimmung über das Gauß-Verfahren im homogenen und inhomogenen Fall, Zusammenhang der Lösungsmenge des homogenen Systems mit der eines zugehörigen inhomogenen Systems Matrix-Vektor-Schreibweise eines LGS, Rang einer Matrix, Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang Lösbarkeitskriterien über den Rangbegriff Satz über die Anzahl der frei wählbaren Parameter Lösungsraum des homogenen LGS als Vektorraum mit Dimensionsbegriff	Das Gauß-Verfahren sollte begründet werden. Die Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang muss nicht bewiesen werden. (vgl. MA-3+)
15	**Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen I** lineare Abbildungen als strukturverträgliche Abbildung zwischen Vektorräumen Kern(f) als Unterraum des Urbildraumes, Zusammenhang mit der Lösungsmenge eines homogenen LGS, geometrisch im Dreidimensionalen Schnitt dreier Ebenen durch den Ursprung Bild(f) als Unterraum des Bildraumes Matrix A_f als basisabhängige Darstellung einer linearen Abbildung mit den Spaltenvektoren als Bilder der Basisvektoren, Rang(A_f) = dim Bild(f); Interpretation eines inhomogenen LGS über Bild(f) (dreidimensional-geometrisch: Schnitt dreier Ebenen, aus dem Ursprung verschoben) Rangbestimmungen mittels elementarer Umformungen Dimensionssatz	Die verschiedenen Darstellungsformen mittels linearer Abbildung, Matrix und LGS sollen flexibel und angemessen genutzt werden.

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen II** Hintereinanderausführung linearer Abbildungen, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition und Vervielfachung inverse Matrix (Existenz der Umkehrabbildung), eindeutige Lösbarkeit von LGS mit den dazugehörigen Interpretationen wie $\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$ Anwendungsaufgaben, z. B. mehrstufige Produktionsprozesse, Markow-Ketten oder Quadriken (Kegelschnitte)	

MA-4+: Stochastik II (55 Stunden) und Prüfungsvorbereitung (restliche Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Stochastik** Zufallsgrößen: Erwartungswert und Varianz (Standardabweichung); Eigenschaften, Ungleichung von Tschebyschew	Fortsetzung von MA-2+. Die entsprechenden Begriffe der Statistik, Mittelwerte und Streuungsmaße, sollten aus der Mittelstufe bekannt sein.
20 10	Bernoulli-Ketten, binomialverteilte Zufallsgrößen: graphische Darstellung, Erwartungswert, Varianz; Näherung durch die Normalverteilung Anwendungen (z. B. Wahlumfragen), kσ-Intervalle, $\sqrt{n}$ - und $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz, signifikante Abweichung, Wechselwirkung zwischen Realität, Modell und Stichprobe Gesetz der großen Zahlen für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit mögliche Ergänzungen: Markow-Ketten, Finanzmathematik	 mögliche Ergänzung: Poisson-Verteilung
15	**Beurteilende Statistik**: Hypothesentests, Null- und Gegenhypothese, Fehler 1. und 2. Art, Signifikanzniveau, Annahme- und Ablehnungsbereich, Konfidenzintervall	mögliche Ergänzung: Chi^2-Test
Rest	**komplexe Übungen zur Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung**	