Mathematatik

im

Leistungskurs
des Herder-Gymnasiums
(Stammzug)

Entwurf durch ST am 21.11.2008, Änderungen mit MD und RI 27.12.2008

Vorbemerkung

Das vorliegende Curriculum gilt für die vier Kurssemester im Leistungsfach Mathematik (Stammzug) ab dem Schuljahr 2010/2011.

Grundlage ist der Rahmenlehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe der Senatsverwaltung (gültig ab 2006/2007).

Durch spezifische Anmerkungen methodisch-didaktischer Natur werden das intendierte Vorgehen und die beabsichtigte Tiefe ergänzend beschrieben.

Übersicht über die Unterrichtseinheiten:

Kurs	Thema	Std.	Unterrichtseinheiten	Std.
MA-1	Analysis	75	Folgen und Grenzwerte	15
			Stetigkeit	10
			Differenzierbarkeit, Ableitung	35
			Integralrechnung (I)	15
MA-2	Analysis Stochastik	75	Integralrechnung (II)	55
			Stochastik (I)	20
MA-3	Lineare Algebra und Analytische Geometrie	75	Vektorraum, Lineare Gleichungssysteme	30
			Analytische Geometrie	45
MA-4	Stochastik komplexe Aufgaben	??	Stochastik (II), Beurteilende Statistik	30
			Aufgaben aus allen Themengebieten	Rest
			Abiturprüfung	-

Std.	MA-1: Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Reelle Zahlenfolgen, Grenzwerte (15 Std.)** • Reelle Zahlenfolgen als spezielle Funktionen von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ • Veranschaulichung von Folgen auf der Zahlengeraden • Beschränktheit und Monotonie von Folgen • Grenzwert, Konvergenz einer Folge, Häufungswerte, konvergente Teilfolgen einer Folge mit Häufungswerten, Beschränktheit einer konvergenten Folge • Nachweise dafür, dass eine vermutete Zahl tatsächlich Grenzwert einer gegebenen Folge ist mit Hilfe der Grenzwertdefinition	Hier ist an den Abschnitt *Folgen und Grenzwerte in elementarer Form* aus Klasse 10 sinnvoll anzuknüpfen. Es bietet sich an, exemplarisch rekursive und explizite Darstellungen von Folgen gegenüberzustellen (u.a. für geometrische Folgen, geometrische Reihen (Summenformel)) und so eine Verbindung zum Gebiet „Prinzip der Vollständigen Induktion" zu knüpfen. Es sollten logische Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert einer Folge diskutiert und ein Ausblick auf sowohl bestimmt als auch unbestimmt divergente Folgen gegeben werden. Aus Zeitgründen sollte man sich auf instruktive Beispiele beschränken.
5	• Grenzwertsätze für konvergente Folgen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient) • Konvergenzkriterium für monotone Folgen • $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	Der Nachweis eines Grenzwertsatzes genügt. Anwenden der Grenzwertsätze für den Konvergenznachweis bzw. die Ermittlung von Grenzwerten für Folgen. Als Beispiele für konvergente bzw. divergente Folgen können auch Partialsummenfolgen, d.h. Reihen herangezogen werden.
10	**Stetigkeit (10 Std.)** • Stetigkeit von Funktionen an einer Stelle (Folgendefinition) und auf ihrem Definitionsbereich (insbesondere ganzrationaler Funktionen) • Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum/Minimum	In diesem Zusammenhang sollten als Gegenbeispiele auch überschaubare Unstetigkeitsstellen einfacher Funktionen untersucht und graphisch veranschaulicht werden. Begründung, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.
5	**Ableitung (15 Std.)** • Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzenquotientenfolgen • Zusammenhang Stetigkeit - Differenzierbarkeit • Begriff der Ableitungsfunktion • Ableitungsregeln: $(c)' = 0$, $(x)' = 1$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$	Aus Zeitgründen soll nicht neu gestartet werden; die Kenntnisse aus Klasse 10 sind zu vertiefen! Die drei Aspekte der 1. Ableitung sollten anschaulich herausgearbeitet werden: 1. Tangentenanstieg an der entsprechenden Stelle, 2. lokale Änderungsrate (z.B. Momentangeschwindigkeit bei einem Weg-Zeit-Gesetz), 3. lineare Approximierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle. An einer Stelle stetige, dort jedoch nicht differenzierbare Funktionen sind anzusprechen. Zu vorgegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion ermitteln und graphisch darstellen. Die Regeln sollten aus Klasse 10 bekannt sein.

Std.	MA-1: Lerninhalte	Anmerkungen
10	• Ableitung trigonometrischer Funktionen • Produkt-, Quotienten- und Kettenregel • Ableitung der Umkehrfunktion • Ableitung von x^r ; $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	Die Ableitung von cos, tan, cot kann auf die Ableitung von sin gestützt werden. Wiederholung zu Umkehrfunktionen aus der Mittelstufe, graphische Darstellung von f und f^{-1} .
15	**Untersuchungen von Funktionen** (aus den bisher eingeführten Funktionenklassen) **(15 Std.)** • Relative Extrema einer Funktion, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen mit entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien (auch Vorzeichenkriterium) für deren Existenz bei differenzierbaren Funktionen • Absolute Extrema einer Funktion auf einer Menge, Extremwert- und Anwendungsaufgaben • Untersuchung von Funktionen (Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Monotonieintervalle, Symmetrie) • NEWTONverfahren	Auch hier kann und sollte auf Kenntnissen aus Klasse 10 aufgebaut werden. Beim Beweis der hinreichenden Kriterien kann man sich auf den globalen Monotoniesatz stützen (anschaulich), der erst mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (s.u.!) bewiesen wird. Komplexe Übungen in Anwendungssituationen zu den bisher behandelten Funktionenklassen und Verfahren → siehe auch MA-4! Hier muss auch exemplarisch auf gebrochenrationale Funktionen eingegangen werden (einschließlich Asymptotenfunktionen) (aus Klasse 10!) An die Betrachtung hinreichender Bedingungen für die Konvergenz ist nicht gedacht.
5	**Sätze über differenzierbare Funktionen (5 Std.)** • Satz von ROLLE • 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung • Globaler Monotoniesatz	Die Sätze eignen sich besonders zur Vergabe von Referaten.
10	**Integralrechnung I (15 Std.):** • Inhalte von Flächen unter Graphen als Grenzwerte • Eine Definition des bestimmten Integrals (RIEMANN-Integral) für auf [a , b] definierte und beschränkte Funktionen mittels ausgezeichneter Zerlegungsfolgen • Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion • Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall monotone bzw. stetige Funktionen • Eigenschaften des bestimmten Integrals (Intervalladditivität, Linearität)	Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechnen. Definition z.B. mittels Ober- und Untersummen oder mittels RIEMANNscher Zwischensummen. Der Nachweis der Integrierbarkeit einer über [a , b] stetigen Funktion kann entfallen, da er gleichmäßige Stetigkeit erfordert..
5	– siehe MA-2! –	

Std.	MA-2: Lerninhalte	Anmerkungen
5 aus MA-1 + 10	**Integralrechnung II (20 Std.)** • Mittelwertsatz der Integralrechnung • Integralfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Stammfunktion, unbestimmtes Integral • Satz über die Differenz zweier Stammfunktionen F_1, F_2 einer Funktion f • Berechnen einfacher bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen • Methode der partiellen Integration • Integration durch Substitution	Fortführung aus MA-1 (5 Stunden) Die Einführung von Differentialen ermöglicht einen eleganten Zugang und Beweis. Geometrische Interpretation des Satzes.
10	• Inner- und außermathematische Anwendungen: Flächeninhalte, Volumen von Rotationskörpern (Kugel, Paraboloid, Ellipsoid), physikalische Arbeit	Üben des Integrierens (“Aufleitens”)
15	**Exponential- und Logarithmusfunktion (15 Std.)** • Einführung der ln-Funktion über das Integral $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt \;;\quad x \in \mathbb{R}^+$ • Folgerungen aus der Integraldefinition (einzige Nullstelle, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie) • Herleitung der Funktionalgleichung der ln-Funktion, Ermittlung der Wertemenge $W(\ln) = \mathbb{R}$ • Ermittlung der Basis der ln-Funktion • Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich $\int \frac{dx}{x} = \ln(\lvert x \rvert) + C \;;\; x \in \mathbb{R} \;,\; x \neq 0$ • Einführung der e-Funktion als Umkehrfunktion der ln-Funktion, Eigenschaften der e-Funktion	Äquivalente Zugänge sind hier natürlich möglich: Beim genannten Weg über den Logarithmus werden alle zentralen Begriffe aus der Analysis angewendet. Der alternative (oder zusätzliche) Zugang über Exponentialfunktionen wird der größeren Bedeutung dieser Funktionenklasse (Anwendungsbezug) gerecht; die Eigenschaften (Funktionalgleichung!) sind (Schülern) auf natürliche Weise einsichtig. Das lokale Wachstum ist dem Funktionswert proportional; der “schönste” Proportionalitätsfaktor 1 führt kanonisch auf die Basis *e*. $1 = \ln'(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{n}}$ $= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ $= \ln(e)$ Die Eigenschaften der e-Funktion ergeben sich als Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften der ln-Funktion. Für Randwertbetrachtungen können die Regeln von de L’HOSPITAL vorgezogen werden.

Std.	MA-2: Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Vertiefung / Anwendung der Analysis (20 Std.)** • Integration mittels einfacher Partialbruchzerlegungen (PBZ) • Arcus-Funktionen • Regeln von de L'HOSPITAL • **Uneigentliche Integrale** • **numerische Integration**	Die Integration mittels PBZ, die Arcus-Funktionen und die Regeln von de L'HOSPITAL sind fakultativ. Uneigentliche Integrale und numerische Integration müssen behandelt werden.
10	• Funktionsuntersuchungen und Anwendungsaufgaben zu Exponential- und Logarithmusfunktionen • Funktionenscharen • Rotationskörper	Ortskurven bieten sich an. Volumen und optional Oberflächeninhalt von Rotationskörpern; GULDINsche Regeln.
10	**Stochastik I (20 Std):** • Systematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei endlicher Ergebnismenge (Ergebnisse, Ereignisse, Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes) • Modelle (Urnenmodelle, Baumdiagramm, Glücksrad, GALTON-Brett, ...) • Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, BAYES-Formel.	Auch hier ist an den Unterricht der Mittelstufe anzuknüpfen: Die Schüler sollten im Gegensatz zu früher reichlich Grundlagen mitbringen – theoretisch alle links genannten! Im Curriculum zur Mittelstufe werden die Begriffe erläutert.
10	• Zufallsgrößen Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und deren Eigenschaften • Anwendungsaufgaben	Zusatz: Ungleichung von TSCHEBYSCHEW **Fortsetzung im MA-4!**

Std.	MA-3 Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Vektorraum (20 Std.)** • Struktur eines Vektorraumes • Linearkombination, Erzeugendensystem, Lineare Hülle • Basen als minimale Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit	Vektorraumstruktur z.B. aus der Lösungsmenge einer linearen Gleichung in 3 Variablen. Neben dem exemplarischen Einstiegsbeispiel eines Vektorraumes sollten in der Folge weitere Beispiele, z.B. Funktionenräume behandelt werden. Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle noch bewusst verzichtet werden, um den Begriff des Vektors bei den Schülern allgemeiner zu verankern. Es empfiehlt sich, in Schreibweisen Zeilen und Spalten sauber zu unterscheiden.
10	• Eindeutigkeit der Darstellung (Spalten) bzgl. fester Basis (Basiswechsel - kanonische Basis) • Unterräume, Dimension (Austauschsatz, Basisergänzungssatz)	
10	**Lineare Gleichungssysteme (LGS) (10 Std.)** Lösungsmengenbestimmung über das GAUß-Verfahren im homogenen und inhomogenen Fall (Zusammenhang: Lösungsmenge eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems) Aus Beispielen: Propädeutische Fassung des Dimensionssatzes (Rang eines LGS als maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren; Dimension der Lösungsmenge als Anzahl der frei wählbaren Variablen)	Hier steht das rechentechnische Verfahren im Vordergrund. Die wesentlich verschiedenen Fälle der Lösungsmengen sollen sich aus geeigneten Beispielen ergeben. Da der Schwerpunkt durch die Senatsvorgaben eindeutig auf der analytischen Geometrie liegt, ist nur eine propädeutische Fassung des Dimensionssatzes möglich..
10	**Analytische Geometrie (45 Std.)** Der affine (Punkt-) Raum (A^3; Geometrie) mit dem zugehörigen Vektorraum der Verschiebungen (V^3) • die 3 Axiome des Zusammenhangs • affines Koordinatensystem und zugehörige (kanonische) Basis des Vektorraumes Geometrische Probleme (im affinen Raum): • Punkte, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ • Untersuchung von Lagebeziehungen	An geeigneten Stellen können die Kenntnisse und Voraussetzungen aus dem $\mathbb{R}^2$ sinnvoll aufgegriffen werden. Lagebeziehungen Gerade/Ebene und Ebene/Ebene sollten zunächst nur beispielhaft behandelt werden.
10	Geometrische Probleme (mit Skalarprodukt): • Skalarprodukt (Abstände; Längen; Winkel zwischen Geraden; Abstand eines Punktes von einer Geraden; Flächeninhalt eines Dreiecks; Abstand windschiefer Geraden; CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung)	Zentraler Aspekt ist der geometrische Gedanke der Projektion auf eine vorgegebene Richtung. Elementargeometrische Sätze lassen sich jetzt elegant beweisen.

20	• Ebenengleichung in Normalen- (Koordinaten-) form; normierte Vektoren; Ebenenabstand zum Ursprung (HESSEsche Normalenform; Abstand: Punkt - Ebene) • Vektorprodukt: Definition und (geometrische) Eigenschaften • Inzidenzuntersuchungen komplexerer Art: Gerade - Ebene; Ebene - Ebene; Abstände und Schnittwinkel usw. • Kreise im $\mathbb{R}^2$: Inzidenzuntersuchungen mit Geraden; Tangenten • Kugeln im $\mathbb{R}^3$: Inzidenzuntersuchungen mit Geraden und Ebenen; Tangentialebenen	Hier ist auch an die variable Herleitung von Ebenengleichungen aus unterschiedlichen bestimmenden Objekten gedacht.
5	Übungssaufgaben: ebene Flächen und Körper im Raum	Auch Aufgaben vergangener Zentralabitursprüfungen bieten sich an.

Std.	MA-4: Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Binomialverteilung (15 Std.)** • BERNOULLI-Ketten • binomialverteilte Zufallsgrößen: graphische Darstellung, Erwartungswert, Varianz • Näherung: Normalverteilung; Anwendungen (z.B. Wahlumfragen), k·σ-Intervalle, $\sqrt{n}$ - und $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz, signifikante Abweichung • Wechselwirkung zwischen Realität, Modell und Stichprobe.	Die Konvergenz gegen die NV kann nur plausibel gemacht werden. Anwendungen stehen im Vordergrund. Zusatz: POISSON-Verteilung, Näherung der Binomialverteilung durch die POISSON-Verteilung
15	**Beurteilende Statistik (15 Std.)** • Hypothesentests, Null- und Gegenhypothese • Fehler 1. und 2. Art, Signifikanzniveau, Annahme- und Ablehnungsbereich, Konfidenzintervall	Zusatz: χ^2 - Test
0	**Analysis (0 Std.)** • Rotationskörper • Uneigentliche Integrale • Numerische Integration	Die vorgeschriebenen Themen Rotationskörper, uneigentliche Integrale und numerische Integration sind im Kurs MA-2 enthalten.
Rest	**komplexe Aufgabenstellungen (n Std.)**	Die Zeit bis zu den Prüfungen ist durch themenübergreifende, komplexe Aufgaben zu nutzen.